



# A MATEMÁTICA

**E**is um problema que poderia ser apresentado aos alunos do IST no âmbito de uma cadeira de probabilidades e Estatística. Pegamos em 9 bolas vermelhas, 18 azuis e 14 verdes, num total portanto de 41 bolas, e misturamo-las todas numa urna. Dessa urna começamos a extrair as bolas, ao acaso e sem reposição. Em cada extracção a bola é classificada numa de duas categorias, digamos A ou B, com a restrição de no final da extracção termos um total de 22 bolas na categoria A e 19 na categoria B.

Podemos fazer várias perguntas interessantes sobre este processo. Pergunta 1: qual é a distribuição de probabilidades que rege esta extracção? Pergunta 2: qual é, terminada a extracção, a probabilidade de se obter a configuração da tabela abaixo?

|   | vermelhas | azuis | verdes |
|---|-----------|-------|--------|
| A | 9         | 13    | 0      |
| B | 0         | 5     | 14     |

A pergunta 1 pode exigir ao estudante refrescar alguns conhecimentos adquiridos nas cadeiras de PE. No entanto, não é muito difícil concluir que, designando respectivamente por  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  o número total de bolas vermelhas, azuis e verdes (sendo neste caso o universo  $n_1+n_2+n_3=41$ ), designando por  $k$  o número de sucessos (ou seja, de bolas classificadas na categoria A, no nosso caso 22) e finalmente por  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3 = k - n_1 - n_2$  as variáveis aleatórias correspondentes à extracção de bolas vermelhas, azuis e verdes respectivamente, se obtém que a distribuição relevante é:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{\binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x_2} \binom{n_3}{k - x_1 - x_2}}{\binom{n}{k}},$$

que por vezes se designa por multi-hipergeométrica. Note-se que a variável  $X_3$  não é livre devido à condição de numa extracção o número total de bolas classificadas na categoria A ser fixo (igual a  $k = 22$ , neste caso). Esta distribuição permite dar uma resposta parcial à pergunta 2. A extracção observada na configuração acima referida parece "muito improvável", quase miraculosa: conseguimos, extraindo bolas ao acaso, não colocar nenhuma bola verde na categoria A e nenhuma bola vermelha na categoria B. A distribuição acima mostra, de facto, que a probabilidade desta configuração é de  $3,5 \times 10^{-10}$ . Como termo de comparação, refira-se que a configuração mais provável (a mais próxima dos valores médios esperados) tem probabilidade 7,7% – mais de um milhão de vezes superior. Estes factos concretizam um pouco a ideia intuitiva de que é muito improvável a distribuição observada ocorrer por acaso: se numa extracção deste tipo se observasse esta configuração, seria muito duvidoso que ela tivesse sido feita por acaso. Curiosamente, um modelo matemático tão simples como este pode ajudar na discussão daquele que é provavelmente o maior enigma da História da Arte portuguesa: a natureza dos famosos Painéis de S. Vicente, atribuídos a Nuno Gonçalves. Começemos por recordar alguns factos sobre os Pai-

néis. Após a sua “descoberta” no final do século XIX no Paço de S. Vicente de Fora (ela própria envolta em lendas algo romantizadas), o conjunto dos seis painéis nunca deixou de ser objecto de polémicas, por vezes apaixonadas, relativamente à sua origem e interpretação iconográfica.

Os Painéis no seu conjunto são considerados a obra mais importante da pintura portuguesa quatrocentista e mesmo uma das obras europeias de referência deste período. A investigação sobre os Painéis prosseguiu ao longo do século XX, com contribuições importantes a nível da iconografia e da documentação histórica; muitas figuras marcantes da cultura portuguesa deram contribuições para este processo. Foi também realiza-

tituto Português de Conservação e Restauro. O objectivo foi o de proceder à datação das pranchas que formam as tábuas das obras atribuídas a Nuno Gonçalves através de um método chamado *dendrocronologia*, do qual Klein é provavelmente o maior especialista mundial.

A dendrocronologia é hoje um método bem estabelecido e com bastante sucesso na datação da pintura antiga; de uma forma muito resumida, baseia-se na seguinte ideia. As pranchas de madeira utilizadas em pintura são cortadas transversalmente ao tronco das árvores. O tronco, por outro lado, cresce em anéis, formando-se um anel por ano. As árvores que crescem na mesma região climática (Europa) ou na mesma sub-região (Europa Ocidental ou Oriental) reagem de formas

# DOS PAINÉIS

do no início dos anos 90 um extenso estudo radiográfico e reflectográfico dos Painéis. Assim, ao longo da segunda metade do século XX começa a formar-se entre os especialistas de História da Arte uma interpretação relativamente consensual sobre a sua natureza, que exporemos em linhas gerais.

O conjunto dos seis painéis constitui um políptico. De acordo com os especialistas, este políptico terá sido pintado por Nuno Gonçalves integrando um enorme retábulo, o chamado Altar de S. Vicente da Sé de Lisboa. Integrariam este retábulo pelo menos mais seis obras que chegaram até aos nossos dias: as duas tábuas dos *Martírios de S. Vicente – S. Vicente atado à coluna* e *S. Vicente na cruz em aspa* (fragmento) – e os quatro quadros dos Santos. Todas estas obras podem ser hoje admiradas numa sala própria no Museu Nacional de Arte Antiga.

A existência do Altar de S. Vicente está bem documentada; Francisco da Holanda refere-o no século XVI como obra de Nuno Gonçalves. É também geralmente aceite que as duas tábuas dos *Martírios* integravam este retábulo. Em termos históricos, iconográficos e documentais, os especialistas situam a execução dos Painéis por volta de 1470, colocando alguns a hipótese de se estarem relacionados com a celebração da conquista de Arzila (1471).

Contudo, existem alguns dados novos, muito recentes, cuja análise matemática parece não estar de acordo com a concepção dos Painéis como parte do Altar de S. Vicente. No ano de 2001 estive em Lisboa o Professor Peter Klein, da Universidade de Hamburgo, a convite do Ins-

semelhante a estímulos climáticos como a chuva ou a temperatura: condições de crescimento adversas produzem anéis pequenos, condições favoráveis produzem anéis grandes.

A sucessão destas alterações anuais gera numa árvore um padrão de crescimento único no tempo, chamado *assinatura*. Esta assinatura é então comparada com séries cronológicas de referência já estabelecidas para as zonas geográficas e temporais da Europa. Em termos simples, comparam-se os dados observados com uma calibração. Numa árvore com um número suficientemente grande de anéis (cerca de uma centena), o ajustamento da assinatura à calibração permite identificar a origem geográfica e datar rigorosamente o período de vida da árvore em questão.

Observe-se contudo que o ano do último anel observado *não corresponde* à data de abate da árvore. Numa prancha para pintura, torna-se necessário remover a parte mais jovem, aparando a árvore na extremidade junto à casca (os chamados *anéis de borne*). Assim, a data de abate é posterior ao ano do último anel observado. Esta questão encontra-se estudada, conhecendo-se a distribuição estatística empírica dos anéis de borne removidos em função da origem da madeira. Por exemplo, para o carvalho do Báltico a distribuição é assimétrica, variando entre 9 e 24 anos, sendo a mediana (percentil 50) de 15 anos.

Para estimar, a partir da datação dendrocronológica, a primeira data possível para produção de uma pintura, torna-se necessário adicionar outra variável aleatória: após a produção das pranchas, as madeiras têm de secar.

> > > > > > > >

O tempo de secagem distribui-se entre os 2 e os 8 anos, com mediana de 5 anos.

E estamos preparados para analisar os dados de Peter Klein, relativos à datação dendrocronológica das pranchas que constituem todas as pinturas atribuídas a Nuno Gonçalves: os Painéis, os Martírios de S. Vicente e os Santos.

Em primeiro lugar, toda a madeira é carvalho do Báltico. Klein conseguiu datar 22 das 24 pranchas que constituem os seis Painéis, as 6 que constituem a tábua e meia dos Martírios e 13 das 14 que constituem os Santos, num total de 41 pranchas datadas. Os dados observados para o ano do último anel são os seguintes: as pranchas dos Painéis distribuem-se no intervalo [1383,1431]; as dos Martírios no intervalo [1436,1454]; as dos Santos no intervalo [1415,1454].

O conjunto destas distribuições indica que a madeira dos Painéis parece significativamente mais antiga do que a dos Martírios e dos Santos. Será possível construir um modelo matemático que, mesmo de uma forma muito simples, meça a probabilidade de esta distribuição ocorrer? Tomando os intervalos  $I_1 = [1383, 1414]$ ,  $I_2 = [1415, 1431]$ ,  $I_3 = [1432, 1454]$ , adoptados devido a corresponderem às balizas temporais determinadas por Peter Klein, as frequências observadas são as seguintes:

|                         | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ |
|-------------------------|-------|-------|-------|
| <b>Painéis</b>          | 9     | 13    | 0     |
| <b>Martírios+Santos</b> | 0     | 5     | 14    |

O amável leitor é convidado a confrontar a tabela 2 com a tabela 1: são idênticas. Em particular, o modelo das bolas em urnas corresponde, em termos deste problema, a supor que as 41 pranchas estão simultaneamente disponíveis na oficina de Nuno Gonçalves e são escolhidas ao acaso na constituição dos Painéis, dos Martírios e dos Santos. A conclusão é obviamente idêntica: *é extremamente improvável que esta configuração ocorra por acaso.*

Esta observação pode ser posta de forma mais rigorosa através de um teste de hipóteses estatístico. Tomemos como hipótese nula  $H_0$  a afirmação de que a probabilidade de escolher uma prancha em cada um dos intervalos  $I_1$ ,  $I_2$  ou  $I_3$  é a mesma quer esta se destine ou não aos Painéis, sendo a escolha feita ao acaso. Podemos testar a validade de  $H_0$  através de um teste estatístico adequado, neste caso o teste de homogeneidade de qui-quadrado. Construindo a tabela de contingência correspondente, comparam-se as frequências observadas com as esperadas. O resultado do teste de hipóteses é que, sob a validade da hipótese nula, a probabilidade de se observar a distribuição de frequências acima (ou outra ainda mais desfavorável) é de  $2 \times 10^{-6}$ . Como qualquer estudante do IST deve saber, o procedimento estatístico usual é o de rejeitar a hipótese nula quando aquela probabilidade for inferior a 5%. Em casos mais exigentes – ensaios clínicos rigorosos, controle

de qualidade industrial – este limiar pode ser reduzido para 1%. No nosso caso, o valor obtido para a validade da hipótese nula  $H_0$  é *quatro ordens de grandeza inferior à dos testes estatísticos mais rigorosos*, e portanto ela deve ser claramente rejeitada.

Este resultado é surpreendente: significa que a probabilidade de as obras de Nuno Gonçalves em exposição no Museu de Arte Antiga terem sido pintadas na mesma altura em pranchas escolhidas ao acaso é de *uma em meio milhão*. Assim, a datação dendrocronológica parece indicar que, com elevadíssima probabilidade, os Painéis são significativamente mais antigos do que os Martírios ou os Santos. Este facto lança, por outro lado, legítimas dúvidas sobre a hipótese de os Painéis e as restantes obras integrarem o Altar de S. Vicente, contrariando a actual visão consensual dos especialistas em História da Arte.

Outra conclusão que os estudos de dendrocronologia permitem extrair é a determinação da primeira data a partir da qual é possível a execução dos Painéis. A prancha mais recente dos Painéis tem como data do último anel o ano de 1431. Com um mínimo de 9 anos de para remoção dos anéis de borne e 2 anos de secagem, obtemos como primeira data possível para execução dos Painéis o ano de 1442. Para os Martírios, a prancha mais recente é de 1454 e portanto a primeira data possível é 1465.

É muito interessante notar que, um ano antes dos trabalhos de Peter Klein, o matemático Jorge Filipe de Almeida, do ISEG, publicou em colaboração com Maria Manuela Barroso de Albuquerque *Os Painéis de Nuno Gonçalves* (Verbo, 2000). Nesta obra os autores revelam algo de surpreendente: segundo afirmam, existe uma assinatura e datação dos Painéis que poderão ter passado despercebidos até hoje. Estas marcas estarão disfarçadas como aparentes marcas decorativas no botim do adolescente no Painel do Infante, e são legíveis apenas em posição invertida (ver fig. 2). De acordo com Jorge Filipe de Almeida, a sua leitura é **S.N.Gs. A.CCCCRb**, o que significaria **Selo de Nuno Gonçalves, Ano de 1445**. Constrói-se a partir daqui uma interpretação histórica e iconográfica dos Painéis de impressionante erudição.

As afirmações de Jorge Filipe de Almeida contrariam a interpretação consensual dos Painéis, que seriam assim um quarto de século anteriores ao que é hoje aceite pelos especialistas e não fariam parte do Altar do S. Vicente. E, se por um lado a datação dendrocronológica de Peter Klein veio reforçar *a posteriori* a credibilidade da sua tese, um parecer de 2002 da Torre do Tombo afirma ser a sua leitura dos símbolos, embora não única, “plausível” do ponto de vista paleográfico. Estes novos dados relativos aos Painéis levaram já a que o Ministério da Cultura promovesse um encontro entre especialistas para os debater, previsto para o final de Maio de 2003. Mas, interessado ou não na Matemática dos Painéis, o melhor conselho que posso dar ao estudante do IST é que não deixe nas férias que se aproximam de admirar esta notável obra no Museu Nacional de Arte Antiga. ▀

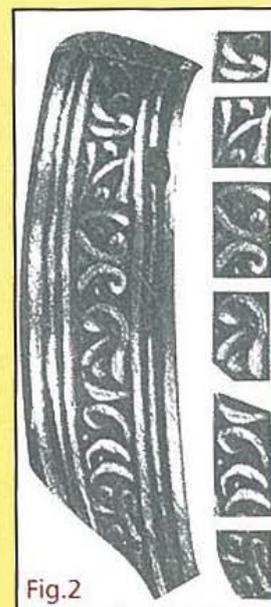


Fig.2